CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

2013

4 heures Calculatrices autorisées

On considère la famille de fonctions $G_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad G_x(t) = e^{ix \sin t}$$

Ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des coefficients de Fourier exponentiels de la fonction G_x.
Pour tout réel x on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_x(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des fonctions φ_n ainsi définies.

I Questions préliminaires

Soit x un réel fixé.

I.A –

I.A.1) Justifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad G_x(t) = e^{ix \sin t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)e^{int}$$

Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de G_x ?

I.A.2) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $|\varphi_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On utilisera des séries de Fourier des dérivées successives de G_x.

I.B – En exprimant $G_x(-t)$ en fonction de $G_x(t)$, montrer que pour n dans $\mathbb{Z}$, $\varphi_n(x) \in \mathbb{R}$.

I.C – Exprimer $G_x(t+\pi)$ et en déduire les égalités suivantes pour n dans $\mathbb{Z}$:

$$\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x) = \varphi_{-n}(x)$$

Que peut-on dire de la parité de φ_n pour $n \in \mathbb{Z}$?

I.D – Calculer $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2$.

L'étude préliminaire permet de restreindre l'étude des fonctions réelles φ_n à $\mathbb{R}^+$ et de se limiter au cas où $n \geqslant 0$.

II Forme intégrale et développement en série entière

Soit n un entier naturel.

II.A – Justifier que pour x réel, $|\varphi_n(x)| \leqslant 1$.

II.B – Montrer que pour x réel,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} I_{n,k} \qquad \text{avec} \qquad I_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i^k e^{-int}(\sin t)^k\,\mathrm{d}t$$

BY-NC-SA

II.C –

II.C.1) À l'aide de la formule d'Euler, justifier que pour (n,k) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$I_{n,k}=\sum_{m=0}^{k}\frac{A_{m,k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(2m-k-n)}\,\mathrm{d}t$$

avec $A_{m,k}$ des constantes à préciser.

II.C.2) Vérifier que

$$\begin{cases} I_{n,k}=0 & \text{si } n>k \text{ ou si } k-n \text{ est impair}\\ I_{n,k}=\dfrac{(-1)^p}{2^{n+2p}}\dbinom{n+2p}{n+p} & \text{si } k=n+2p \text{ avec } p\geqslant 0\end{cases}$$

II.C.3) En déduire le développement en série entière, pour $n\geqslant 0$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi_n(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \tag{II.1}$$

Préciser le rayon de convergence.

II.C.4) Montrer que φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.D – Relation de dérivation

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, vérifier que pour x réel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\varphi_n(x)\right)=x^n\varphi_{n-1}(x)$$

II.E – Calcul numérique de $\varphi_n(x)$ avec $x>0$ fixé

On approche $\varphi_n(x)$ à l'aide des sommes partielles

$$S_m=\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\,a_p \qquad \text{avec} \quad m\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_p=\frac{1}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}$$

II.E.1) À partir de quelle valeur p_0 de p la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ?

II.E.2) On suppose $N>p_0$. Majorer $|R_N|$ en fonction de (N,n,x) avec

$$R_N=\sum_{p=N+1}^{+\infty}(-1)^p\,a_p$$

En déduire, pour $\varepsilon>0$ fixé, une condition suffisante sur N pour que $|\varphi_n(x)-S_N|<\varepsilon$.

La somme partielle S_N est dite alors *valeur approchée de $\varphi_n(x)$ à ε près.*

II.E.3) Écrire une fonction Maple ou Mathematica, `CalculPhi`, d'arguments (n,x,ε) retournant une valeur approchée de $\varphi_n(x)$ à ε près. Les coefficients a_p seront calculés par récurrence.

III Équation différentielle et étude de φ_n quand $x\to+\infty$

Soit n un entier naturel. On étudie l'équation différentielle d'inconnue y

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \tag{III.1}$$

On recherche des solutions dans l'ensemble $E=\mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$.

III.A – Résolution et propriété des solutions

III.A.1) En utilisant le développement de φ_n en série entière (**II.1**), montrer que φ_n est solution sur $[0,+\infty[$ de (**III.1**).

BY-NC-SA

III.A.2) Soit y une solution dans E de (**III.1**). On pose $z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
Montrer que z est solution dans E d'une équation différentielle du type

$$z'' + q\, z = 0 \tag{III.2}$$

avec $q \in E$.
Préciser l'expression de la fonction q et vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 1$.

III.A.3) Justifier que si z est une solution non nulle de (**III.2**), alors pour $x > 0$, $(z(x), z'(x)) \neq (0, 0)$.
En déduire que si α est un zéro de z, alors il existe un réel strictement positif η tel que α soit le seul point d'annulation de z sur $I =]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$.
On dit dans ce cas que α est un *zéro isolé de* z.

III.A.4) Vérifier que les zéros de φ_n sur $]0, +\infty[$ sont isolés.

III.B – Comportement asymptotique de φ_n en $+\infty$

On étudie ici le comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une solution $z \in E$ de l'équation différentielle définie sur $]0, +\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$z'' + \left(1 + \frac{\lambda}{x^2}\right) z = 0 \tag{III.3}$$

Soit x_0 dans $]0, +\infty[$.

III.B.1) En considérant l'équation différentielle (**III.3**) sous la forme $z'' + z = g$ avec $g(x) = \frac{-\lambda}{x^2} z(x)$, la résoudre sur $]0, +\infty[$ par la méthode de variation des constantes.
En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad z(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} z(u)\sin(u - x)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

III.B.2) On pose pour $x > 0$

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} |z(u)| \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles μ et M telles que h vérifie l'inégalité différentielle pour $x \geqslant x_0$

$$h'(x) - \frac{\mu}{x^2} h(x) \leqslant \frac{M}{x^2}$$

Préciser les constantes μ et M en fonction de A, B et λ.

b) En déduire que h est bornée sur $[x_0, +\infty[$ puis que z est bornée sur ce même intervalle.

Multiplier par $e^{\mu/x}$ et intégrer l'inégalité de la question précédente.

III.B.3) Justifier que

$$\int_{x}^{+\infty} z(u)\sin(u - x)\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.
En déduire l'existence de constantes α et β telles qu'au voisinage de $+\infty$,

$$z(x) = \alpha\cos(x - \beta) + O(\frac{1}{x})$$

III.B.4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple de réels (α_n, β_n) tel que pour $x \to +\infty$,

$$\varphi_n(x) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{x}}\cos(x - \beta_n) + O(\frac{1}{x\sqrt{x}})$$

BY-NC-SA

IV Étude des zéros de φ_n

On introduit l'équation différentielle

$$z_1''(x) + c^2 z_1(x) = 0 \qquad \text{avec} \qquad c > 0 \tag{IV.1}$$

*L'objectif de cette partie est de comparer les solutions des équations différentielles (**III.2**) et (**IV.1**) afin d'obtenir des informations sur les zéros des fonctions φ_n.*

IV.A – En utilisant l'encadrement de la **question II.E.2**, montrer que $\varphi_0(3) < 0$. En déduire que φ_0 possède un zéro $\alpha_0 \in]0,3[$.

On admettra que c'est le premier zéro de φ_0, c'est-à-dire que φ_0 ne s'annule pas sur $]0,\alpha_0[$.

IV.B – En utilisant la **question II.D**, montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ la fonction φ_n est strictement positive sur $]0,\alpha_0[$.

IV.C – Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $c \in]0,1[$. On pose $z(x) = \sqrt{x}\,\varphi_n(x)$, pour $x > 0$.

IV.C.1) Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour $x > A$, $q(x) > c^2$ (q définie en **III.A.2**).

IV.C.2) Soit $a > A$. On pose pour $x > 0$, $z_1(x) = \sin(c(x-a))$, solution de **IV.1**. On définit la fonction $W = z\,z_1' - z_1\,z'$.

Vérifier que pour $x > 0$, $W'(x) = (q(x) - c^2)z(x)z_1(x)$.

IV.C.3) On note $I_a =]a, a + \pi/c[$ et on suppose que φ_n ne possède pas de zéros sur I_a.

Déterminer les signes de $W(a)$, $W(a+\pi/c)$ et de W' sur I_a et aboutir à une contradiction. En déduire que φ_n possède un zéro dans tout intervalle I_a avec $a > A$.

> On pourra distinguer les cas suivant le signe de φ_n sur I_a.

IV.D – Soit $n \in \mathbb{N}$.

IV.D.1) Montrer qu'on peut ordonner les zéros de φ_n, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\left(\alpha_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante de zéros de φ_n telle que φ_n ne s'annule pas sur $]0,\alpha_0^{(n)}[$ et sur tout intervalle $]\alpha_k^{(n)}, \alpha_{k+1}^{(n)}[$ avec k dans $\mathbb{N}$ et que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k^{(n)} = +\infty$.

> Construire la suite $\left(\alpha_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence sur k en montrant que l'ensemble $\mathcal{Z}_k$ des zéros de φ_n dans l'intervalle $]\alpha_k^{(n)}, +\infty[$ possède un plus petit élément.

IV.D.2) En déduire que la suite $(\alpha_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété de répartition asymptotique :

$$\forall c \in]0,1[, \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ 0 < \alpha_{j+k+1}^{(n)} - \alpha_{j+k}^{(n)} < \frac{\pi}{c}$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA